モジュール的組み合わせによる情報集約のための対数マーケット・スコアリング・ルール

Hanson, R.

概要

現実場面において、スコアリング・ルールは個々人から優れた確率推定値を引き出しており、賭けの市場は集団から優れた合意推定値を引き出している。マーケット・スコアリング・ルールはこれらの特徴を併せ持ち、個人ないし集団から推定値を引き出す。集団の場合であっても、コストが個人の場合よりも増えることはない。その対数バージョンは、ある事象の下での別の事象についての賭けに関して前者の事象の確率を保存する性質を持つ唯一のバージョンである。また対数バージョンは、他の事象の条件付き確率を保存し、従って条件付き独立性の関係を保存する。ベースとなる事象のペアについての相対的確率を引き出す対数ルールがあれば、それらのベース事象のすべての組み合わせについて、同様のコストで推定値を引きだせる。

1　イントロダクション

理論的に言えば、確率を引き出すのは難しい。期待効用を最大化しようとする者にとって、選択は効用と確率によって同時に決定されるものであり、従って主観確率を事象依存的効用から分離するためには効用ないし確率についての制約を追加する必要がある (Kadane & Winker, 1988)。この問題を理論的に克服できる洗練されたアプローチもいくつか存在する (Jaffray & Karni, 1999)。しかし実用的には、スコアリング・ルールや関連

下記の論文の、かなり全訳に近い要約です。
Hanson, R. (2007) Logarithmic Market Scoring Rules for Modular Combinatorial Information Aggregation. *The Journal of Prediction Markets*, 1, 3-15.
あくまで勉強用のメモであります。難解でさっぱり理解できないところも、とにかく訳出していますので、きっと誤りが多いと思います。2015/02/15 小野
誤字脱字を修正、コメントを追加。2015/02/16

した諸手法を、あまり洗練されていないやり方で用いることが多いし、天気予報 (Murphy & Winkler, 1984), 経済予測 (O'Carroll, 1977), リスク分析 (DeWispelare, Herren, & Clemen, 1995), 知的コンピュータシステム工学 (Druzdzel & van der Gaag, 1995) においては、そうした手法によって個人から事象の確率についての有益な情報がうまく引き出せている。さらに、会話における単純な言明が、信念の抽出として信頼できるものだとみなされることも多い。

もし確率を引き出すことができるなら、個々人が持っている情報を集約して共通の推定値を得ることは、理論的には容易である。有限状態空間の下で、共通の事前分布を持ち、自分の信念を繰り返し言明し、以前の言明についての共通の知識を持っているベイズ推論者は、未来の状態についての共通の信念に到達するはずであり (Geanakopolos & Polemarchakis, 1982)、従って共通の推定値に到達するはずである (Aumann, 1976)。この考え方でいえば、ベイズ推論者は他者が自分に同意しないであろう方向を予測することさえできない[*1] (Hanson, 2002a)。仮に彼らがこのやりかたで戦略的に嘘をつくという誘惑に駆られるとしても、それぞれのベイズ推論者にスコアリング・ルールに従って繰り返し報酬を与えれば、このゲームのナッシュ均衡が形成されるはずであり (Kalai & Lehrer, 1993)、従って未来の言明についての共通の知識が形成されるはずである。共通の知識を共通の信念で置き換えた場合にも (Monderer & Samet, 1989), 「ベイジアン・ワナビーズ」(Hanson, 2003) の場合にも、これと類似した結果があてはまる。

しかし現実の場面においては、会話のなかで人の意見を繰り返し交換しても、ベイズ推論者に関して理論的に予測される収束には至らない (Cowan & Hanson, 2002)。にもかかわらず、株や商品や未来についての投機市場は、利用できる関連情報を市場価格へと集約するという仕事を、ときに不完全なことはあるにせよ、実にうまく行っているようにみえる (Lo, 1997)。特に賭けの市場は優れた確率推定値をつくりだしている (Hausch, Lo, & Ziemba, 1994)。こうした市場における投機は多くの参加者において非合理的なものにみえるのだが、それでも情報の集約はうまく行われているように思われる。たとえば、オレンジ・ジュースの将来の価格は政府の天気予報の改善に役立っている (Roll, 1984)。ヒューレット・パッカード社内で開かれた市場は、会社の公式的な売上予測に 8 回のうち 6 回まで勝利した (Chan & Plott, 2002)。アイオワ電子市場による US 大統領選予測は、主要な世論調査との 591 回の比較のうち中 451 回においてより正確であった (Berg &

[*1] 文意が理解できない。原文: Bayesians cannot even predict the direction in which others will disagree with them.

0Rietz, 2002)。競馬の市場は競馬の専門家より優れている (Figlewski, 1979)。おもちゃの金銭をやりとりする市場でさえ、映画の興収や科学の進歩について良い予測を行っている (Pennock, Giles, & Nielsen, 2001)。

この分野において理論は完全に信頼できるガイドではなかった。おそらく我々は、スコアリング・ルールと賭け市場の経験的な成功に注目し、これら 2 つのアプローチの短所を避けつつ長所を結合することを試みる必要がある。この精神に則り、本論文ではそうした結合を目指して、マーケット・スコアリング・ルールを提案する。

単純なスコアリング・ルールはさまざまな個人に共通の推定値をつくらせることができない。単純な賭け市場は、何人かが同じ事象に対して協調して賭けないかぎり価格推定値をつくることができないし、ほとんどの賭け市場はそれに参加すること自体が非合理的であるようにみえる。これに対しマーケット・スコアリング・ルールは、ある人がなんらかの事象の集合についての確率を推定する際には単純なスコアリング・ルールのように働き、同時に助成された賭け市場のようにも働く。その市場においては多くの人が繰り返し相互作用して共通の推定値を作り出すし、そうすることが合理的である。

単純なスコアリング・ルールの場合、ある人は事象の確率を申告し、彼の報酬は彼の報告が現実の事象にどのくらい近いかによって決まる。マーケット・スコアリング・ルールは、誰もが現在の申告を変えることができるスコアリング・ルールである。彼ないし彼女は、最後に申告した人にはその申告に従った報酬を支払われるということに同意し、その限りにおいて、自分の新しい申告に基づいて決まる報酬を受け取る。こうすることで、誰もが最後の申告におけるオッズに対してフェアな無限小の賭けをなすことが可能になり、賭けオッズの変化を通じた賭けの積分を作り出すことが可能になる。*2 。マーケット・スコアリング・ルールをつくるコストは、開始時のポジションに対する最終申告の情報性のみに依存し、ルールを何度使ったかとか何人の人がルールを使ったかといったことには依存しない。標準的な賭け市場とは違い、合理的エージェントは参加によって正の利益を期待できる。また、賭けをマッチングさせようとする人を探す必要もない。

確率推定値が求められるような事象は膨大に存在する。そのなかには、単純な事象だけでなく、単純な事象の非常に複雑な組み合わせも含まれる。マーケット・スコアリング・

*2 「誰でもいつでも賭けることができる。賭け金は無限小の賭けに対して定義されており、その瞬間におけるオッズに対してフェアな値である。実際の賭け金は積分で決まる」という意味ではないかと思う。原文: This in effect lets anyone make any infinitesimal fair bet at the odds in the last report, and make any integral of such bets through changing betting odds.

ルールのコストはそれがカバーする事象の数とどのように関連するだろうか？また、変化はどの程度までモジュール的でありうるだろうか？つまり、異なる人々が異なる事象の推定に特化しているとき、それぞれの人々が自分が専門であると思う事柄について推定値を変化させ、かつ他の推定値への意図せぬ変化を最小にとどめることはどの程度まで可能だろうか？

これらの点を考慮すると、マーケット・スコアリング・ルールの対数バージョンが優れていることがわかる。事象のペアからなるなんらかのベース集合を考え、それについての対数ルールを作れば、追加コストなしで、それらのベースとなる事象のすべての組み合わせに対して適用できる単一のルールを作ることができる。さらに、ある事象の下での別の事象の条件付き確率について、対数ルールに従って賭けを行うとき、前者の事象の確率は変わらないし、さらに別の事象についての条件付き確率も変わらない。このように対数ルールは、人がある事象についてあるリスクをとって賭けをしたとき、その当該の事象の確率だけを変える*3。このことは、巨大な確率空間が持つ複雑性に対処するために人が用いる一般的なメカニズムである条件的独立性の関係の使用を支持している。対数ルールを用いれば、ある事象に対する賭けは他の事象との条件的独立性の関係を変えない。

たとえば、月曜日に雨が降る確率、火曜日に雨が降る確率、水曜日に雨が降る確率についての推定値を作り出すための対数ルールがあれば、「月曜日に雨で降った場合に火曜日と水曜日に雨が降るか否か」といった推定値を作り出すのに追加コストはいらない。もし誰かが「月曜日に雨が降った場合は火曜日に雨が降るだろう」と賭けたとして、この賭けは月曜日に雨が降る確率の推定値を変えない。現在の推定値が、火曜日に雨が降る確率の下で水曜日に雨が降る確率と月曜日に雨が降る確率が独立であるということを示しているとき、誰かが「月曜日に雨が降った場合は火曜日に雨が降るだろう」に賭けたとしても、この独立性の関係は変わらない。

本論文では、まずスコアリング・ルールについて概観し、次にマーケットスコアリング・ルール、そのコスト、そのモジュール性について論じる。

*3 「当該の事象の確率の推定値だけを変える」という意味であろう。

2 スコアリング・ルール

期待効用を最大化するエージェントについて考えよう。互いに素な事象 i の完全な集合に関するこのエージェントの主観的信念を p_i とし、$\sum_i p_{i\in I} = 1$ とする。このエージェントは、ある**プロパー・スコアリング・ルール** (Savage, 1971) $x_i = s_i(\vec{r})$ に従って金額 x を受け取る。ここで x_i は i が現実の事象となったときに支払われる金額であり、r_i はそのエージェントが事象 i について申告した確率、$\vec{r}$ は申告の全体である。$\vec{s} = \{s_i\}_i$ がプロパー・スコアリング・ルールを構成しているとき、報酬の期待金額を最大化すべく r_i を決めているエージェントは、正直な申告 $r_i = p_i$ を行う。つまり、

$$\vec{p} = \mathrm{argmax}_{\vec{r}} \sum_i p_i x_i = \sum_i p_i s_i(\vec{r}) \ \ \text{given} \sum_i r_i = 1$$

リスク中立エージェントの場合、事象独立的効用によって期待される金銭報酬を最大化できる。リスク中立でないエージェントでも期待される金銭報酬を最大化させることができる[*4]。また、スコアリング・ルールはエージェントに、意図しなければ手に入れられないような情報を手に入れることへのインセンティブを提供することができる (Clemen, 2002)。

[*5] この最大化の 1 階条件と 2 階条件は下式となる。すべての事象 j について

$$\lambda = \sum_i p_i \nabla_j s_i(\vec{p})$$

$$0 \le \sum_i p_i \nabla_j \nabla_j s_i(\vec{p})$$

ここで λ はラグランジュの乗数、∇_j は要素 j に関する偏微分作用素である。この 1 階条件を p_k について微分すると、$\nabla_k \nabla_j = \nabla_j \nabla_k$ より $\nabla_j s_i = \nabla_i s_j$ が得られる。これは

[*4] エージェントがリスク中立的でない場合になにがどうなるのか、よく理解できない。原文: Other agents can also be induced to maximize an expected monetary payoff. なお、ここには次のような後注がついている。「極端な結果を伴うくじのチケットを買うエージェントとは、もし効用が共通の上界・下界を持つならば、ペイオフの期待値を最大化する (Jaffray & Karni, 1999)。ある種の保険ゲームに参加したあとでくじを買うベイズ推論者は、客観的信念に対するペイオフの期待値の相対値を最大化する。ここで客観的信念とは、彼らが客観的だと信じている信念のことで、既知の共通の事前分布を個人的情報で修正したものである (Hanson, 2002b)」。

[*5] この段落、まるごと理解できない... 悲しい...

関数 $g(\vec{r})$ について $s_i(\vec{r}) = \nabla_i g(\vec{r})$ であることを示している (Williamson, Corwell, & Trotter, 1972)。この関数 $g(\vec{r})$ は、エージェントの申告 $\vec{r}$ によって決まる彼の均衡期待報酬の一部であることが示されている (Savage, 1971)。

プロパー・スコアリング・ルールの例を挙げると、

$$
\begin{array}{rl}
\text{二次} & s_i = a_i + br_i - b\sum_j r_j^2/2 \\
\text{球面} & s_i = a_i + br_i/\left(\sum_j r_j^2\right)^{1/2} \\
\text{対数} & s_i = a_i + b\log(r_i) \\
\text{べき法則} & s_i = a_i + b\alpha\int_0^{r_i} \rho_0^{\alpha-2} d\rho_i - b\sum_j r_j^\alpha
\end{array}
$$

べき法則ルールは $\alpha \geq 1$ のときにプロパー・スコアリング・ルールとなる (Selten, 1998)。二次ルールと対数ルールはともにべき法則ルールの特殊ケースで、$\alpha = 2$ のときに二次ルール (Brier, 1950), $\alpha = 1$ のときに対数ルールとなる (Good, 1952)。

[*6]二次ルールは数多くの望ましい特徴を満たしている (Selten, 1998)。対数ルールもいくつかの望ましい特徴を満たす (von Holstein, 1970)。たとえば、1_{ij} が $i = j$ のときに 1、そうでないときに 0 を表すものとして、なんらかの v_j について制約 $\nabla_j s_i = 1_{ij} v_i$ を満たし得る唯一のルールは対数ルールである。この制約が満たされるということは $s_i(\vec{r}) = s_i(r_i)$ ということ、つまりエージェントの報酬が実際の事象に付与された確率だけに依存しているということである (Savage, 1971)。したがって対数ルールは、標準的な尤度法を通じてエージェントに報酬を与えかつ彼らを評価できる唯一のルールである (Winkler, 1969)。

ここまで、スコアリング・ルール $s_i(\vec{r})$ は $\sum_i r_i = 1$ を満たす基準化された $\vec{r}$ に関して定義されてきたが、これをここで $\sum_i r_i \neq 1$ の場合に拡張しておくと便利である。この拡張のためには r_i を $r_i/\sum_j r_j$ に置き換えればよい。たとえば拡張された対数ルールは $s_i = a_i + b_i \log(r_i/\sum_j r_j)$ である。[*7]これと等価な別のアプローチは、すべての正の α について $\vec{s}(\alpha\vec{r}) = \vec{s}(\vec{r})$ であることを求めることである。これにより $0 \leq \nabla_i \nabla_i g$ かつ $0 = \sum_i p_i \nabla_i \nabla_j g$ となり、$\lambda = 1$ となる。たとえば拡張された対数ルールに関して $g(\vec{r}) = b\sum_i r_i \log(r_i/\sum_j r_j)$ である。

[*6] この段落もよく理解できない。
[*7] この段落はここから理解できない。

3　マーケット・スコアリング・ルール

実在する多くの市場において、すべての取引はマーケット・メーカと呼ばれるひとつないし少数の中心的アクターによってなされている。これらのアクターはふつう、売り買いを公的に提供し、取引に反応して価格を更新する。情報の集約において、人間のマーケット・メーカは、標準的なダブル・オークション・マーケットと同じくらいにうまく働くことがわかっている (Krahnan & Weber, 1999)。適度な助成金があれば自動マーケット・メーカもまたこの取引支援の役割を果たし得る[*8]。たとえば、自動マーケットメーカは Hollywood Stok Exchange (www.hsx.com) は自動マーケット・メーカをうまく利用して数千の映画・映画スターの有望性についての投機を促進している。

[*9]以前から次のことが知られている。一次元において、エージェントにプロパー・スコアリング・ルールによる相互作用を許すことは、連続的なオファー要求スケジュールからエージェントがある数量を選択することを許すことと等価である (Savage, 1971)。本論文では、この等価性が高次な次元でも成立することを示す。単純なスコアリング・ルールのバリエーションであるマーケット・スコアリング・ルールは、連続的な自動マーケット・メーカのように働く。任意の数のエージェントがこのマーケット・メーカと任意の数の相互作用を持つことができ、最後の相互作用におけるコストよりほかに追加コストは必要としない。

任意のスコアリング・ルール $s_j(\vec{r})$ について、エージェントは次の形式の支払いを受け入れることに自発的に合意するはずである[*10]。

$$x_i = \Delta s_i(\vec{r}, \vec{\rho}) = s_i(\vec{r}) - s_i(\vec{\rho})$$

ただし $\vec{\rho}$ は任意の値を持つ。結局のところ、エージェントは $\vec{r} = \vec{\rho}$ とすることで効果がなくなる ($\vec{x} = 0$) ことに納得できるし、自分の信念 $\vec{r}$ に対して $\vec{r} = \vec{p} \neq \vec{\rho}$ とすれば正の (そして最大の) 利益を期待することができる (すべて基準化されているものとする)。こうして、もしわれわれが $\vec{\rho}$ を最後の申告とすることを繰り返せば、任意の数のエージェント

[*8] 訳に自信がない。原文: For the price of a modest subsidy, automated market makers can also play this role in supporting trade.

[*9] この段落も理解できないけど、まあいいや。

[*10] 原文: For any scoring rule $s_i(\vec{r})$, an agent should voluntarily agree to accept a payment of the form [数式] for any value of $\vec{\rho}$. ここの"should" ってどういう意味だろう?

が任意の数の相互作用を行うことが可能になる。つまりこういうことである。いま、エージェントがマーケット・スコアリング・ルールに従い、一度にひとつ、申告 $\vec{r}_t$ を行ったとしよう。それぞれの申告に対してエージェントに $x_{it} = \Delta s_i(\vec{r}_t, \vec{r}_{t-1})$ を支払う。ただし $\vec{r}_0$ は参照点となる最初の申告である。T 回の申告に対して支払われる総コストは、

$$x_i = \sum_{t=1}^{T} x_{it} = \sum_{t=1}^{T} (s_i(\vec{r}_t) - s_i(\vec{r}_{t-1})) = s_i(\vec{r}_T) - s(\vec{r}_0)$$

となる。これは最初の申告と最後の申告にのみ依存している。従って、これは最後の申告が最終的値 r_i と同じであった場合のコストに等しい[*11]。

$\vec{r}_0$ から $\vec{r}_T$ への全移動は、追加コストなしで $\vec{r}_{t-1}$ から $\vec{r}_t$ へのより小さな移動へと分割できるわけだが、それだけでなく、それぞれの小さな移動も、連続的に変化する t とともに変化する申告 $\vec{r}(t)$ に沿った無限小の移動 $d\vec{r}$ の積分であると考えることができる。[*12] 仮に、あるエージェントが自分の申告を速度 $q_i = dr_i/dt$ で変えているとしよう。彼の資産合計の変化率は $y_i = dx_i/dt = \sum_j q_j \nabla_j s_i$ である。従って、このエージェントが信念 $\vec{p}$ を持つとき、彼の期待報酬の変化率は

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i x_i = \sum_i p_i y_i = \sum_i p_i \sum_j q_j s_i(\vec{r}) = \sum_j q_j \left(\sum_i p_i \nabla_j s_i(\vec{r}) \right).$$

となる。$\vec{r} = \vec{p}$ のとき、プロパー・スコアリング・ルールの 1 階条件により、上の式の最後の項 (カッコのなか) が 0 になる。このように、1 階条件は実は局所的な「フェアな賭け」条件である。つまり、1 階条件が述べているのは、あるエージェントが自分の申告を変える際に交換する資産が、現在の「市場」価格 $\vec{r}$ に照らして、局所的にみてフェアな賭け (すなわち期待値 0 の賭け) である、ということである。あるエージェントは、「事象 i が生じたら 1 ドル支払う」という形式の資産を、おなじ形式の別の資産との交換で支払う[*13]。

こうして我々は、マーケット・スコアリング・ルールを連続的な在庫ベース自動マーケット・メーカとみなすことができる。このようなマーケット・メーカは、少なくとも無

[*11] 文意が理解できない。原文: [...] is thus the same as the cost for one final report with the same final values r_i.

[*12] さあ、ここからも難解だ...

[*13] ここだけ読むと、通貨なしで「事象 i が生じたら 1 ドル支払う」証券を物々交換するような印象を受けるけど、そういう意味ではないだろう。原文: An agent pays assets of the form “Pays $1 if event i holds” in exchange for other assets of the same form.

限小の取引においては売買スプレッドを 0 とし、資産の在庫 $\vec{x}$ [*14] によって完全に記述される内的状態を持ち、即時的価格 $\vec{p} = \vec{m}(\vec{x})$ を提供する (ただし $\sum_i \vec{m}_i(\vec{x}) = 1$) [*15]。つまり、このようなマーケットメーカは「フェアな賭け」である任意の無限小の取引 $d\vec{x} = \vec{y}dt$ を受け入れ

$$\sum_i y_i m_i(\vec{x}) = 0$$

とする。さらに、こうした無限小の取引の積分である任意の有限な取引を受け入れる[*16]。

マーケット・メーカの主要な仕事は、他の人が行った取引から潜在的な情報を抽出し、新しい合理的な価格を推論することである (O'Hara, 1997)。ある無限小の取引への反応として、マーケット・スコアリング・ルールは「推論ルール」$\nabla_u m_j$ を持つ。これは $dp_i/dt = q_i = \sum_j y_j \nabla_j m_i$ を通じて、フェアな価格変化を決定する。この推論ルールは、取引における期待された反選択の埋め合わせをするために、$\nabla_i m_i < 0$ を満たさなければならない[*17]。つまり、人々が買うということは、おそらくはマーケット・メーカの価格が低すぎることを示しているのであり、人々が売るということは価格が高すぎるということを示している。

マーケット・スコアリング・ルールが合意推定値を生み出すやりかたは、賭け市場が合意推定値を生み出すやり方と同じである。それぞれの人は常に現在の推定値を自由に変えることができる。ただし、そうするためにはさらなるリスクを引き受けなければならない場合もある。いずれは、すべての人にとって、少なくともさらなる情報を受け取るまではもうこれ以上推定値を変えたくないというポイントに到達する。このポイントにおいて市場は均衡に達したと言える。

$\vec{1} = \{1\}_i$ として、すべての α について $\vec{m}(\vec{x} + \alpha\vec{1}) = \vec{m}(\vec{x})$ とすることで、$m(\vec{x})$ をすべての $\vec{x}$ へと拡張できる。このことは、マーケット・メーカの現金準備額を変えても価格

[*14] ここで $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ は、マーケット・メーカからみて、事象 $1, 2, \ldots$ が実現したら参加者どもにいくら支払う羽目になるか、という値。すなわち、証券の発行済み枚数のこと。あるエージェントからみたペイオフの話をしているのではない。頭を切り換えないといけないですね。

[*15] $\vec{m} = \{m_1, m_2, \ldots\}$ は、事象 $1, 2, \ldots$ の証券についてマーケット・メーカが値付けた「時価」のこと。ただし、注文によって「時価」は刻々と変化するので、実際の取引価格はこの金額ではなく、「時価」を注文量のぶんだけ積分した値になる。

[*16] 原文: That is, such a market maker will accept any ''fair bet" infinitesimal trade $d\vec{x} = \vec{y}dt$, such that [数式] and accept any finite trade that is a integral of such infinitesimal trades.

[*17] 理解できない。原文: This inference rule should satisfy $\nabla_i m_i < 0$ to compensate for an expected adverse selection in trades.

は変わらないということを意味している[18]。以上と $\sum_i m_i = 1$ をあわせると以下が示される。

$$\sum_i \nabla_i m_j = 0$$

$$\sum_i \nabla_j m_i = 0$$

ある特定のプロパー・スコアリング・ルールと等価なマーケット・メーカ $\vec{m}$ は、$\sum_i p_i = 1$ のときに $\vec{p} = \vec{m}(-\vec{s}(\vec{p}))$ を満たす。負の記号がついているのはエージェントの利得はマーケット・メーカの損失だからである。たとえば、対数スコアリング・ルール $s_i = a_i + b\log(p_i)$ は指数マーケット・メーカ

$$m_i(\vec{x}) = \frac{\exp((-a_i - x_i)/b)}{\sum_j \exp((-a_i - x_i)/b)}$$

と対応しており、微分方程式

$$\nabla_i m_j = -m_i(1_{ij} - m_j)/b$$

によって特徴付けられる。このような、マーケット・メーカとスコアリング・ルールのあいだの等価性は、こうしたマーケットメーカは恣意的に大きな利得を追求することができないということを保証している。また、投資家をグループとしてみたとき、等価なプロパー・スコアリング・ルールへのなんらかの報告 $\vec{r}$ を行うことによって得られるものしか得ることができない。

4 マーケット・スコアリング・ルールのコスト

マーケット・スコアリング・ルールと相互作用するすべてのエージェントに与えられる総資産は、最終申告を $\vec{r}_T$, 参照される初期申告を $\vec{r}_0$ として $x_i = s_i(\vec{r}_T) - s(\vec{r}_0)$ である。スコアリング・ルールを助成するパトロンからみると、初期申告を彼女の初期信念 $\vec{\pi}$ と等しくすれば、すなわち $\vec{r}_0 = \vec{\pi}$ とすれば、支払の期待値が最小化される。

極端なケースとして、エージェントが実際の状態 i について確信を持った場合、主催者の支払の期待値は $\sum_i \pi_i \Delta s_i(\vec{1}_i, \vec{\pi})$ である (ただし $\vec{1}_i = \{1_{ij}\}_j$)。対数スコアリング・

*18 「現金準備額」ってどういうこと？ 原文: This says that changing the cash reserves of a market maker does not change its prices.

ルールの場合、この最大期待支払額は初期分布 $\vec{\pi}$ のエントロピー $-b\sum_i \pi_i \log(\pi_i)$ である。そこまで極端でない場合、もし主催者が最終申告の確率推定値を受け入れるなら、彼女の支払の期待値は、初期分布のエントロピーと最終分布のエントロピーの差に比例する。(二次スコアリング・ルールの場合、最大期待支払額は $b - b\sum_i \pi_i^2$ である。) もちろん、これらのコスト計算は、現在の価格の伝達コスト、価格算出と資産変化のコスト、取引実装のコストを無視したものである。

[*19]可能な事象 i の空間は、それぞれが V_n 個の可能な値 v を持つ N 個のベース変数 n の**組み合わせ**積空間として解釈できるだろう。この場合、可能な事象 i の個数は $I = \prod_{n\in N} V_n$ となり、事象は $i = \{v_n\}_n$ と書き表すことができる。ただし v_n はベース変数 n の特定の値である。仮にエージェントがベース変数の値の確率についてのみ申告するとすると、彼らは $\sum_{v\in V_n} r_{nv} = 1$ であるような r_{nv} について申告していることになる。こうしたベースのみ申告の最大期待コストは $\sum_{nv} p_{nv}\tilde{s}_v(\vec{1}_v, \vec{p}_n)$ である。ただし p_{nv} は $v_n = v$ を満たす事象 i を通じた p_i の合計である。対数スコアリング・ルールの場合、すべてのベース変数の値の組み合わせの確率についての申告 $\vec{r} = \{r_i\}_i$ の最大期待コストは、少なくともパラメータ b が定数である限り、ベースのみ申告のコストを**超えない**。結局のところ、いかなる完全分布のエントロピーも、その周辺分布のエントロピーの合計を超えないのである。

組み合わせ申告を助成するために、直接的な追加財政コストは不要であるが、価格と資産を更新する計算コストを束縛するのは依然として難しい。こうした更新は計算上複雑になりうる。最悪の場合、多項式よりも悪くなる (つまり NP 困難になる) (Cooper, 1990)。こうした計算コストを最小化するマーケット・スコアリング・ルールをつくりだす方法は未解決の課題として残されている。

5 マーケット・スコアリング・ルールのモジュール性

組み合わせであれなんであれ、確率推定値が求められる事象の数は膨大である。マーケット・スコアリング・ルールについての、実用上の重要な検討事項のひとつは、人々が巨大な事象空間を扱うのをどのように助けるか、そして、自分が相対的にみて専門性を持っていると思う事柄について推定値を変えるのを助けつつ、ほかの推定値を意図せず気

[*19] この段落は組み合わせの賭けの話。ほとんど理解できないが、まあ、いいか。

づかずに変化させてしまうのを食い止めるためにはどうしたらいいか、という点である。

これらの検討事項は、なんらかの事象についての取引が、他の事象に関する条件付き独立性関係を保存するか、という形で定式化できる。条件付き独立性は複雑な確率分布を管理する際の中心的な道具である。変数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ に関して、分布 P において変数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ のもとで $\mathcal{C}$ と独立であるということを次のように書く。$\mathcal{A}$ のすべての値 A_i, $\mathcal{B}$ のすべての値 B_j, $\mathcal{C}$ のすべての値 C_k について

$$P(A_i|B_jC_k) = P(A_i|B_j)$$

またこれを $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ とも書く ($I(\mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{A})$ も同じ意味である)。人は多くの場合、確率推定値をうまく言明することができないが、条件付き独立性の関係については素早く確信を持って表現できるのがふつうである。人はまた、推定された独立性の関係を変更するよりも、確率推定値を変更することのほうが多い。こうした関係から、関連する事象のスパースなグラフを決定することができ、それによって、結果として生じる確率区間の次元数を著しく縮約することができる。人はこうしたグラフのなかに自分が相対的に専門性を持つ領域を設定することが多い (Pearl, 1988; Pennock & Wellman, 2000)。

マーケット・スコアリング・ルールに従って賭けをし、事象 B の下での事象 A にのみ賭けるエージェントについて考えてみよう。つまり、このエージェントは「B が実現し A が実現しなかったら 1 ドル払う」という形式の資産を売り、「A と B が実現したら 1 ドル払う」という形式の資産を得る。$y_i = dx_i/dt$ であることを思い出そう。事象 A と B をより細かい事象 i の集合として記述するならば、すべての $i, j \in A \cap B$ について $y_i = y_j$, すべての $i, j \in \bar{A} \cap B$ について $y_i = y_j$、すべての $i \in \bar{B}$ について $y_i = 0$、ということになる。一般にこうした賭けは、具体的なマーケット・スコアリング・ルールに依存して、確率推定値 p_i を変化させ、従って事象の確率 $p(C) = \sum_{i \in C} p_i$ を変化させる。しかし、この賭けが $p(A|B)$ (そしてもちろん $p(\bar{A}|B) = 1 - p(A|B)$) 以外の確率を変えてしまうのは最小限に抑えるのが望ましいように思われる。

つまり、マーケット・メーカの推論ルールは次のように想定するべきである。B のもとでの A に対する新しい賭けは、一般的にいって、事象 A が事象 B にどれだけ依存しているかについての新情報を与えてくれるが、B の確率については情報を持たず、また A が B に依存している程度と無関係な事象についても情報を持たない。こうした無関係な事象については、すでにある独立性の関係を保持しなければならない。

対数マーケット・スコアリング・ルールは、こうした強い意味での**局所性**を持っている。

二値変数 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ について考えよう。$\mathcal{A}$ の値を A と $\bar{A}$、$\mathcal{B}$ の値を B と $\bar{B}$、$\mathcal{C}$ の値を C と $\bar{C}$ とする。下の定理を証明できる (証明は付録を参照)。

定理 1　対数ルールに従った、B の下での A についての賭けは、$p(B)$ を保存する。また、任意の事象 C について、$p(C|AB), p(C|\bar{A}B), p(C|\bar{B})$ を保存する。従って $I(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}), I(\mathcal{B},\mathcal{A},\mathcal{C})$ を保存する。

少なくとも 3 つの事象 i があれば、この逆も成り立つ。つまり。対数マーケット・スコアリング・ルールは、B のもとでの A についての賭けが $p(B)$ を保存するという弱い意味においてさえ、局所性を持つ唯一のルールである。この制約を満たすルールは、事象が 2 つしかないもっとも単純なケースにおいてもこの制約を満たす。つまり、$A = \{j\}, B = \{j,k\}$ という最も単純な場合においては、dx_j と dx_k のみが非ゼロであり、dp_j と dp_k のみが非ゼロである。この制約を満たすのは対数ルールだけであることが証明できる。

定理 2　$I \geq 3$ のとき、$i \notin \{j,k\}$ について $y_i = 0$ であることが $i \notin \{j,k\}$ について $q_i = 0$ であることを意味するならば、そのルールは対数ルールである。

このように、対数マーケット・スコアリング・ルールは局所的な推論を持つというというユニークさを持っている。誰かが B に条件付けられた A について賭けたとき、その人は B が真であることにはリスクを追っていないのだが、対数ルール以外のすべてのマーケット・スコアリング・ルールは、B の確率についての推定値を変えてしまうことがある。いっぽう対数ルールは、$p(B)$ を保存するし、さらにすべての事象 C について $p(C|AB), p(C|\bar{A}B), p(C|\bar{B})$ を保存する。

6　結論

個人から確率推定値を引き出すためには、通常、単純なスコアリング・ルールが用いられている。リスク回避的効用や状態依存的効用を扱う必要がある場合には、もっと洗練されたバージョンも利用できる。理論的には、個人の推定値を繰り返し引き出しアナウンスすることで、共通の推定値を作り出すことができるはずである (しかし実際には推定値の

差異は消えずに残る)。いっぽう実際の場面では、共通の推定値を引き出すために、標準的な賭け市場が用いられることが多い。個々の参加者は非合理的だと思われるし、取引のためには強調が必要ではあるのだが、賭け市場は個人の情報をうまく集約しているように思われる。

単純なスコアリング・ルールの場合、ある人はそれぞれの事象についての確率を申告し、その申告と実際の事象によって決まる支払を受ける。マーケット・スコアリング・ルールは、誰もが公的な申告を変えることができるスコアリング・ルールである。ある人は、最後に申告した人にその人の申告に従った支払を与えるのに同意する限りにおいて、自分の新しい申告に対する支払を受ける。こうすることで、最後の申告のオッズに対する無限小のフェアな賭けを誰もが行えるようになる。通常の賭け市場のような、賭けのマッチングをしてくれる誰かを探す必要はない。マーケット・スコアリング・ルールは、単純なスコアリング・ルールと賭け市場の長所を結合し、個人から推定値を引き出し、かつそれらを結合して共通の推定値を作り出す。

マーケット・スコアリング・ルールの実装コストは、単純なスコアリング・ルールの実装コストを超えない。コストは確率推定値を求めるベース事象の数によって決まる。対数ルールの場合、追加コスト無しで、ベース事象のすべての組み合わせについての推定値を引き出すことができる。対数ルールは取引から非常に局所的な推論を行うという点でもユニークである。ある事象の下での他の事象への賭けに関して、前者の事象の確率を保存するのは対数ルールだけである。対数ルールはそのほかの事象の条件付き確率も保存する。すなわち、条件付き独立性の関係を保存する。

ただし、組み合わせ事象空間におけるマーケット・スコアリング・ルールの更新の計算コストは大きなものになりうる。こうしたコストを最小化し配分する最良の方法は未解決の問題として残されている。

おわり